* pour $x=1-\frac{1}{n}>0$

$Lnx \le x-1 \Rightarrow$

$Ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \le -\frac{1}{n} \Rightarrow$

$-nLn\left(1-\frac{1}{n}\right) \ge 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right] \ge 1 \Rightarrow$

$Ln\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}\right] \ge Lne \Rightarrow$

$$\boxed{e \le \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}} (II)$$

$(I)+(II) \Rightarrow$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \le e \le \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}}$$

EX 14 :

1) $t \ge 0$

$* \frac{1}{1+t}-(1-t)=\frac{t^2}{1+t} \ge 0$

$d'ou \boxed{1-t \le \frac{1}{1+t}} (1)$

$*\left(1-t+t^2\right)-\frac{1}{t+1}=\frac{t^3}{1+t} \ge 0$

$d'ou \boxed{\frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2} (2)$

$(1)+(2) \Rightarrow 1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2 \quad pour\ t \ge 0$

2) $x \ge 0$

On a :

$1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1-t+t^2 \ ; \ \forall t \in [0,x]$

D'où

$$\int_0^x (1-t)dt \le \int_0^x \frac{dt}{1+t} \le \int_0^x \left(1-t+t^2\right)dt$$

$$\Rightarrow \left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x \le \left[Ln|1+t|\right]_0^x \le \left[t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{2}x^2 \le Ln(1+x) \le x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

3)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{Ln(1+x)}{x} & si\ x>0\\ 1 & si\ x=0\end{cases}$$

a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivable $(x \ne 0)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Ln(1+x)}{x}=1=f(0)$

d'où f est continue à droite en 0.

c) pour $x>0$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{Ln(1+x)-x}{x^2}$$

D'après 2)

$$-\frac{x^2}{2} \le Ln(1+x)-x \le -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{Ln(1+x)-x}{x^2} \le -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \le -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$$

f est dérivable à droite en 0 et

$$f'_d(0)=-\frac{1}{2}$$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn